Struktureller Aufbau der Teile I bis III

Regularität von Lagrange-Multiplikatoren für gemischte Beschränkungen

Existenz von Lagrangemultiplikatoren & KKT-Bedingungen/Optimalitätssystem für gemsichte Beschränkungen

$u, y \in L^\infty(\Omega)$, $\overline{u}$ lokal optimal, keine (M-NB) $\Rightarrow U_{ad} \in L^\infty(\Omega)$, linearisierte Slater-Bedingung

(i) $\overline{\mu}_i \in (L^\infty(\Omega))^*$

(ii) $\overline{p} \in \bigcap_{1 \le t \le \frac{N}{N-1}} W^{1,t}(\Omega)$

(iii)
$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}\overline{y} + c_0\overline{y} + d(\cdot,\overline{y}) + f &= \overline{u} && \text{auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}\overline{y} + \alpha\overline{y} + b(\cdot,\overline{y}) + g &= 0 && \text{auf } \Gamma\\
-\mathcal{A}\overline{p} + c_0\overline{p} + d_y(\cdot,\overline{y})\overline{p} &= \overline{y} - y_d + \sum_{i=1}^k (\partial_y g_i(\cdot,\overline{y},\overline{u})^*\overline{\mu}_i)\,|_\Omega && \text{auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}\overline{p} + \alpha\overline{p} + b_y(\cdot,\overline{y})\overline{p} &= \sum_{i=1}^k (\partial_y g_i(\cdot,\overline{y},\overline{u})^*\overline{\mu}_i)\,|_\Gamma && \text{auf } \Gamma\\
\int_\Omega (\kappa(\overline{u} - u_d) + \overline{p})h\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^k \partial_u g_i(\cdot,\overline{y},\overline{u})h\,d\overline{\mu}_i &= 0 && \forall h \in L^\infty(\Omega)\\
\overline{\mu}_i &\ge 0\\
\int_\Omega g_i(\cdot,\overline{y},\overline{u})\,d\overline{\mu}_i &= 0 && i = 1,\dots,k
\end{aligned}$$

$U_{ad} = L^\infty(\Omega)$
$Y_{ad} = C(\overline{\Omega})$
$\exists \overline{u} \in U_{ad}$
$\sigma = r$

Optimalitätssystem vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}\overline{y} + c_0\overline{y} + d(\cdot,\overline{y}) + f &= \overline{u} && \text{auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}\overline{y} + \alpha\overline{y} + b(\cdot,\overline{y}) + g &= 0 && \text{auf } \Gamma\\
-\mathcal{A}\overline{p} + c_0\overline{p} + d_y(\cdot,\overline{y})\overline{p} &= \overline{y} - y_d + \sum_{i=1}^k \partial_y g_i(\cdot,\overline{y},\overline{u})\overline{\mu}_i && \text{auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}\overline{p} + \alpha\overline{p} + b_y(\cdot,\overline{y})\overline{p} &= 0 && \text{auf } \Gamma\\
\kappa(\overline{u} - u_d) + \overline{p} + \sum_{i=1}^k \partial_u g_i(\cdot,\overline{y},\overline{u})\overline{\mu}_i &= 0\\
\overline{\mu}_i &\ge 0\\
\int_\Omega g_i(\cdot,\overline{y},\overline{u})\overline{\mu}_i\,dx &= 0 && i = 1,\dots,k
\end{aligned}$$

L^1-Regularität von Lagrangemultiplikatoren für gemischte Beschränkungen

$\overline{u}$ lokal optimal, keine (M-NB), $\overline{\mu}_i \in L^\infty(\Omega)^*$, (A3)
$\Rightarrow \overline{\mu}_i \in L^1(\Omega)$

$\sigma = 2$ und Bedingungen an g_i auf $D \supset \overline{\Omega}$

L^∞-Regularität von Lagrangemultiplikatoren für gemischte Beschränkungen

$(\overline{y},\overline{u}) \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \times L^\infty(\Omega)$,
keine (M-NB) $\overline{\mu}_i \in L^1(\Omega)$, (A4)
$\Rightarrow \overline{\mu}_i \in L^\infty(\Omega)$

Aufgabenstellung und Existenzsätze

Existenz optimaler Lösungen des Modellproblems unter Zusatzfoderungen

a) keine g_i, $\sigma < \infty \Rightarrow \exists \overline{u}$
$\sigma = r$, $Y_{ad} = L^\infty(\Omega)$ $y_u \le \lambda u + y \le y_o$
b) $\sigma = r = 2 \Rightarrow \exists \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$
c) $U_{ad} = L^\infty(\Omega) \Rightarrow \exists \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$

Steuerungs-Zustandsoperator
$S \in C^1\left(L^\sigma(E), H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\right)$

$r > \frac{N}{2}$ $s > N+1$
Existenz & Eindeutigkeit von Lösung der PDE + Abhängigkeit der Lösung von rechter Seite

lokal optimal Steuerung

Generelle Voraussetzungen

generelle Aufgabe

$$\begin{aligned}
&\min J(y,u) = \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_\Omega^2 + \tfrac{\kappa}{\sigma}\|u - u_d\|_{E,\sigma}^\sigma\\
-\mathcal{A}y + c_0 y + d(x,y) + f &= u \quad \text{auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \alpha y + b(x,y) + g &= 0 \quad \text{auf } \Gamma\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \quad \text{auf } \Gamma\\
g_i(x,y,u) &\le 0 \quad \text{auf } \Omega,\ i = 1,\dots,k\\
u &\in U_{ad}\\
y &\in Y_{ad}.
\end{aligned}$$

Lagrange-Multiplikatoren für Mengenrestriktionen

Existenz von Lagrangemultiplikatoren ohne Ungleichungsbeschränkungen

$(\overline{y},\overline{u}) \in Y_{ad} \times U_{ad}$ sei optimal, keine (UnG-NB), linearisierte Slaterbedingung
(i) $\exists \overline{\mu} \in C(X)^*$
(ii) $\exists \overline{p} \in \bigcap_{1 \le t \le \frac{N}{N-1}} W^{1,t}(\Omega)$

KKT-Bedinungen/Optimalitätssystem für nichtgemischte Beschränkungen

$(\overline{y},\overline{u},\overline{p},\overline{\mu})$ optimal

$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}\overline{y} + c_0\overline{y} + d(\cdot,\overline{y}) + f &= \overline{u} && \text{auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}\overline{y} + \alpha\overline{y} + b(\cdot,\overline{y}) + g &= 0 && \text{auf } \Gamma\\
-\mathcal{A}\overline{p} + c_0\overline{p} + d_y(\cdot,\overline{y})\overline{p} &= \overline{y} - y_d + \overline{\mu}_\Omega && \text{auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}\overline{p} + \alpha\overline{p} + b_y(\cdot,\overline{y})\overline{p} &= \overline{\mu}_\Gamma && \text{auf } \Gamma\\
\int_\Omega (\overline{p} + \kappa|\overline{u} - u_d|^{\sigma-2}(\overline{u} - u_d))(u - \overline{u})\,dx &\ge 0 && \forall u \in U_{ad}\\
\int_X (y - \overline{y})\,d\overline{\mu} &\le 0 && \forall y \in Y_{ad}
\end{aligned}$$

Strukturaussagen über Lagrange-Multiplikatoren

δ-aktive Menge
Annahme an gemischte Beschränkungen
$\partial_u g_i(\cdot,y,u)|_{M_\delta} \ge 1$

aktive Menge

geometrische Annahmen an die aktive Menge

Komplementarität des Lagrangemultiplikators

$Y_{ad} := \{y_u \le y \le y_o\} \subset C(\overline{\Omega})$
(i) $y_o \rightsquigarrow \overline{\mu}^-$
$y_u \rightsquigarrow \overline{\mu}^+$
(ii) $\overline{\mu}(IA_y) = 0$
(iii) $\overline{\mu}^+(A_y^u \cup IA_y) = \overline{\mu}^-(A_y^o \cup IA_y) = |\overline{\mu}|\,(IA_y) = 0$

Zerlegung des Lagrangemutiplikators in singulären Randanteil und regulären inneren Anteil

Moreau-Yosida-Regularisierung

Aufgabe für Moreau-Yosida-Regularisierung

$$\min J(y,u) = \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{\kappa}{2}\|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}y + c_0 y + d(\cdot,y) + f &= u \text{ auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \alpha y + b(\cdot,y) + g &= 0 \text{ auf } \Gamma \qquad (P_\infty)\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \text{ auf } \Gamma
\end{aligned}$$
$u \in U_{ad} := \left\{u \in L^2(\Omega)\,|\,u_u \le u \le u_o\right\}$, wobei $u_u, u_o \in L^2(\Omega)$ fest mit $u_u < u_o$
$y_u \le y \le y_o$ auf Ω, wobei $y_u, y_o \in L^\infty(\Omega)$ fest

$N \le 3.$

lineare Aufgabe

$$\min J(y,u) = \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{\kappa}{2}\|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}y + c_0 y &= u \text{ auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \alpha y &= 0 \text{ auf } \Gamma \qquad (P_\infty^{lin})\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \text{ auf } \Gamma
\end{aligned}$$
$u \in L^2(\Omega)$
$y_u \le y \le y_o$ auf Ω, wobei $y_u, y_o \in L^\infty(\Omega)$ fest

Äquivalente Formulierung der Comlementary-Slackness-Condition

$1 \le p < \infty$, $p' := \frac{p}{p-1}$, $y, \overline{y}, y_o \in L^p(\Omega)$
und $\overline{\mu}_y^o \in L^{p'}(\Omega) = (L^p(\Omega))^*$
oder $y, \overline{y}, y_o \in L^\infty(\Omega)$ und $\overline{\mu} \in L^1(\Omega)$

Moreau-Yosida-regularisierte Aufgabe

$$\begin{aligned}
\min J_\gamma(y,u) = \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \tfrac{\kappa}{2}\|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+ \tfrac{1}{2\gamma}\|(\tilde{\mu} + \gamma(y - y_o))^+\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+ \tfrac{1}{2\gamma}\|(-\tilde{\mu} + \gamma(y_u - y))^+\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}y + c_0 y + d(\cdot,y) + f &= u \text{ auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \alpha y + b(\cdot,y) + g &= 0 \text{ auf } \Gamma \qquad (P_\gamma^{\tilde{\mu}})\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \text{ auf } \Gamma
\end{aligned}$$
$u \in U_{ad} := \left\{u \in L^2(\Omega)\,|\,u_u \le u \le u_o\right\}$, wobei $u_u, u_o \in L^2(\Omega)$ fest mit $u_u < u_o$
$y_u, y_o \in L^\infty(\Omega)$ fest.

Moreau-Yosida-regularisierte lineare Aufgabe

$$\begin{aligned}
\min J_\gamma(y,u) := \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \tfrac{\kappa}{2}\|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+ \tfrac{1}{2\gamma}\|(\gamma(y - y_o))^+\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+ \tfrac{1}{2\gamma}\|(\gamma(y_u - y))^+\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}y + c_0 y &= u \text{ auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \alpha y &= 0 \text{ auf } \Gamma \qquad (P_\gamma^{lin})\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \text{ auf } \Gamma
\end{aligned}$$
$u \in L^2(\Omega)$
$y_u, y_o \in L^\infty(\Omega)$ fest

primal-dualer Pfad

Zielfunktional des primal-dualen Pfads

Eigenschaften des primal-dualen Pfads
generelle Voraussetzungen (A10),(A11)
(i) C ist beschränkt.
(ii) Für $\gamma \to \infty$: $(\overline{u}_\gamma, \overline{y}_\gamma, \overline{p}_\gamma) \to (\overline{u}, \overline{y}, \overline{p}) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
(iii) C ist global Lipschitz-stetig bzgl. $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, d.h.:

Zulässigkeit schwacher Grenzwerte
generelle Voraussetzungen (A10)(A11)
$\overline{u}_\gamma$ opt. Lsg. von (P_γ^0), eine Folge $\gamma_n \to \infty$
Jeder schwache Grenzwert $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ von Teilfolgen von $(\overline{u}_{\gamma_n})$ ist zulässig für (P_∞).

$(\overline{y},\overline{u})$ optimales Paar von (P_∞)
$\tilde{\mu} = 0$

Konvergenz der Moreau-Yosida-Regularisierung
generelle Voraussetzungen (A10)(A11) $\gamma_n \to \infty$
(i) $\overline{u}_{n_j} \rightharpoonup u$
(ii) $\overline{u}_{n_j} \rightharpoonup u \Rightarrow \|\overline{u}_{n_j} - \overline{u}\|_\Omega \to 0$
(iii) Besitzt das Problem (P_∞) ein eindeutiges optimales Paar $(\overline{y},\overline{u})$, so konvergiert jede Folge optimaler Paare $(\overline{y}_n,\overline{u}_n)$ gegen $(\overline{y},\overline{u})$.

lokale Lipschitz-Stetigkeit der Multiplikator-Approximationen
generelle Voraussetzunngen, (A10), (A11)
$\gamma \mapsto (\overline{\mu}_\gamma^{\tilde{\mu},o}, \overline{\mu}_\gamma^{\tilde{\mu},u})$ ist lokal Lipschitz-stetig in $L^2(\Omega)$ für $\gamma \ge 0$.

Superlineare Konvergenz des EPF-Algorithmus

Modellfunktionen für das Zielfunktionals des primal-dualen Pfads

Krümmungsverhalten des Zielfunktionals des primal-dualen Pfads
generelle Voraussetzungen, (A10)-(A12)
$\gamma \mapsto \dot{V}(\gamma)$ ist für $\gamma > 0$ monoton fallend.

Monotonie des Zielfunktionals des primal-dualen Pfads
generelle Voraussetzungen, (A10)-(A12)
$\forall \gamma > 0 : \dot{V}(\gamma) > 0.$

Optimallösung stößt an Zustandsschränken an

Differenzierbarkeit des Zielfunktionals des primal-dualen Pfads
$$\dot{V}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left((\overline{y}_\gamma - y_o)^+\right)^2 + \left((y_u - \overline{y}_\gamma)^+\right)^2 dx$$

Lavrentiev-Regularisierung

$U_{ad} = L^\infty(\Omega)$
$\Rightarrow$ Existenz optimaler Lösungen mit Satz 4, ebenso für $U_{ad} = \{u_u \le u \le u_o\}$

Lavrentiev-regularisierte Aufgabe

$$\min J(y,u) = \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_\Omega^2 + \tfrac{\kappa}{2}\|u - u_d\|_\Omega^2$$
$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}y + c_0 y + d(x,y) + f &= u \text{ auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \alpha y + b(x,y) + g &= 0 \text{ auf } \Gamma \qquad (P_\lambda)\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \text{ auf } \Gamma
\end{aligned}$$
$y_u \le \lambda u + y \le y_o$ auf Ω, wobei $y_o, y_u \in L^\infty(\Omega)$ fest und $y_o - y_u \ge konst > 0$
$u \in U_{ad} \subset L^\infty(\Omega)$

Aufgabe für Lavrentiev-Regularisierung

$$\min J(y,u) = \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_\Omega^2 + \tfrac{\kappa}{2}\|u - u_d\|_\Omega^2$$
$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}y + c_0 y + d(x,y) + f &= u \text{ auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \alpha y + b(x,y) + g &= 0 \text{ auf } \Gamma \qquad (P_0)\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \text{ auf } \Gamma
\end{aligned}$$
$y_u \le y \le y_o$ auf Ω, wobei $y_o, y_u \in L^\infty(\Omega)$ fest und $y_o - y_u \ge konst > 0$
$u \in U_{ad} \subset L^\infty(\Omega)$

Existenz eines für alle regularisierten Probleme zulässigen Punkts
$\exists (\hat{y},\hat{u})$zulässig $\forall (P_\lambda)$ mit $0 \le \lambda \le \lambda_0$

Linearisierte Slater-Bedingung

Konvergenz der Lavrentiev-Regularisierung
generelle Voraussetzungen (A6)(A7) $U_{ad} = L^\infty(\Omega)$ (λ_n) positive Nullfolge
(i) $\overline{u}_{n_j} \rightharpoonup u$
(ii) $\overline{u}_{n_j} \rightharpoonup u \Rightarrow \|\overline{u}_{n_j} - \overline{u}\|_\Omega \to 0$
(iii) Besitzt das Problem (P_0) ein eindeutiges optimales Paar $(\overline{y},\overline{u})$, so konvergiert jede Folge optimaler Paare $(\overline{y}_n,\overline{u}_n)$ gegen $(\overline{y},\overline{u})$.

Lavrentiev-regularisierte lineare Aufgabe

$$\min J(y,u) = \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_\Omega^2 + \tfrac{\kappa}{2}\|u - u_d\|_\Omega^2$$
$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}y + c_0 y &= u \text{ auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \alpha y &= 0 \text{ auf } \Gamma \qquad (P_\lambda^{lin})\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \text{ auf } \Gamma
\end{aligned}$$
$0 \le u \le u_o \in L^\infty(\Omega)$
$y_u \le \lambda u + y$ auf Ω, wobei $y_u \in L^\infty(\Omega)$ fest.

lineare Aufgabe

$$\min J(y,u) = \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_\Omega^2 + \tfrac{\kappa}{2}\|u - u_d\|_\Omega^2$$
$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}y + c_0 y &= u \text{ auf } \Omega\\
\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \alpha y &= 0 \text{ auf } \Gamma \qquad (P_0^{lin})\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \text{ auf } \Gamma
\end{aligned}$$
$0 \le u \le u_o \in L^\infty(\Omega)$
$y_u \le y$ auf Ω, wobei $y_u \in L^\infty(\Omega)$ fest

$\lambda > 0$ kein Eigenwert von $-\iota S'(\overline{u})$

Hilfsoperatoren

lokale Transformation auf Steuerungsbeschränkungen
$\overline{u}_\lambda$ lokal optimal für (P_λ)
$\Rightarrow \overline{v} := \overline{u}_\lambda + S(\overline{u}_\lambda)$ ist optimale Lösung eines rein steuerungsbeschränkten Problems

Existenz von Lagrange-Multiplikatoren
Hohe Regularität von Lagrange-Multiplikatoren

(P_λ) **Transformierte Lavrenitiev-regularisierte Aufgabe**

$$\min J(y,w) = \tfrac{1}{2}\|y - y_d\|_\Omega^2 + \tfrac{\kappa}{2}\|\tfrac{w-y}{\lambda} - u_d\|_\Omega^2$$
$$\begin{aligned}
-\lambda\mathcal{A}y + (\lambda c_0 + 1)y + \lambda d(\cdot,y) + \lambda f &= w \text{ auf } \Omega\\
\lambda\partial_{\nu_\mathcal{A}}y + \lambda\alpha y + \lambda b(\cdot,y) + \lambda g &= 0 \text{ auf } \Gamma\\
\text{bzw.}\quad y &= 0 \text{ auf } \Gamma
\end{aligned}$$
$w \in W_{ad} = \{w \in L^\infty(\Omega)\,|\,y_u \le w \le y_o \text{ auf } \Omega\}$,
wobei $y_o, y_u \in L^\infty(\Omega)$ fest und $y_o - y_u > konst > 0$

Hilfsoperator → **halbglattes Newton-Verfahren**

Abschätzung des Regularisierungsfehlers
generellen Voraussetzungen, $(A8)$,
$\overline{u}$, $\overline{u}_\lambda$ optimale Lösungen von (P_0^{lin}) bzw. (P_λ^{lin})
$\Rightarrow \exists C > 0 : \kappa\|\overline{u} - \overline{u}_\lambda\|_\Omega^2 + \|\overline{y} - \overline{y}_\lambda\|_\Omega^2 \le C\lambda$

Slater-Bedinung

zulässige Näherungslösungen
generelle Voraussetzungen, $(A8)$, u_0 Slaterpunkt
(i) $u_\zeta := (1 - \zeta)\overline{u}_\lambda + \zeta u_0$ zulässig für (P_0^{lin})
(ii) $\exists c > 0$: $\kappa\|\overline{u} - \overline{u}_\zeta\|_\Omega^2 + \|\overline{y} - \overline{y}_\zeta\|_\Omega^2 \le c\lambda$.